UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR **Trimestre: Ene-Mar 2010**
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS PURAS Y APLICADAS
MATEMÁTICA I (MA-1111)
Fecha de publicación: 13/01/10
Contenido para el parcial: I

PRÁCTICA DE LA SEMANA 3 y 4

Contenidos

- Operaciones con funciones.
- Transformaciones gráficas de funciones.
- Función inyectiva.
- Función inversa.
- Funciones trigonométricas.
- Funciones trigonométricas inversas.
- Composición

Ejercicios a resolver en la práctica

1. Sean $f(x)=\sqrt{2-x}$ y $g(x)=\sqrt{x+2}$.

a) Determina el dominio de las funciones *f* y *g*.
b) Halla el dominio y una expresión para cada una de las siguientes funciones.
i) $(f+g)(x)$ **ii**) $(fg)(x)$ **iii**) $(f/g)(x)$
c) ¿Existirá algún elemento del dominio de *f* y *g* tal que $f(x)=g(x)$?, en caso afirmativo hállalo.
d) ¿Qué significa el resultado hallado en d)? Verifícalo gráficamente.

2. Dadas las funciones reales de variable real *f*, *g* y *h* definidas por $f(x)=|x|$, $g(x)=x+1$ y $h(x)=x^2-1$, halla $F(x)$, si $F=h\circ g\circ f$.

Ejercicios tomados del Problemario Cálculo Diferencial e Integral por publicar

3. Dadas las funciones reales de variable real *f* y *g* definidas como $f(x)=\sqrt{x+\frac{\pi}{2}}$ y $g(x)=\frac{1}{x^2}$

a) Determina $(g\circ f)(x)$.

b) Indica el dominio de la función $g\circ f$.

4. Para cada una de las funciones definidas a continuación determina el dominio.

a) $f(x)=\frac{\sqrt{-x}}{1-5x^2}$ **b)** $f(x)=\sqrt{(x-1)(3-x)}$ **c)** $g(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}}{9-x^2}$ **d)** $\mathrm{t}(x)=\frac{x-2}{\cos 2x}$

5. Dadas $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ y $g(x)=\begin{cases} x+3 & \text{si} \quad x>2 \\ 1-x & \text{si} \quad x<-2 \end{cases}$

a) Indica el dominio de *f*.
b) Indica el dominio de *g*.
c) Halla $(g\circ f)(x)$ e indica su dominio.
d) Halla $(f\circ g)(x)$ e indica su dominio.

6. Grafica las funciones definidas a continuación.

a) $w(x)=|\,x\,|$ **b)** $w_1(x)=|\,x+2\,|$ **c)** $w_2(x)=1+|\,x-3\,|$ **d)** $w_3(x)=1-|\,x\,|$ **e)** $w_4(x)=|\,1-|\,x\,|\,|$

7. Sea $f(x)=5x-4$.
a) Demuestra que la función *f* es invertible.
b) Halla la función inversa de *f*.
c) Determina $f(3)$ y $f^{-1}(11)$.

8. Determina el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b)** $\arccos(-1)$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **d)** $\tan^{-1}(-1)$

9. Halla el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\cos\left(\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$ **b)** $\operatorname{sen}\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ **c)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$ **d)** $\arccos(\cos(0)))$

10. Dada $f(x)=\begin{cases} x+2, & x<-3 \\ -1, & -3\le x\le \pi \\ -\operatorname{sen} x, & x>\pi \end{cases}$,

a) Halla $f(2)$, $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{13\pi}{6}\right)$, $f(-2\pi)$.

b) Grafica la función *f*.
c) A partir de la gráfica indica el rango de la función.

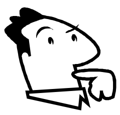
Ejercicios propuestos

1. Sean $f(x)=4x^3$ y $g(x)=(x+2)^2$. Escribe las expresiones de:

a) $(f+g)(x)$ **b)** $g(x-2)$ **c)** $1+f(2x))$ **d)** $(f\,g)(x)$ **e)** $4\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

2. Dadas las funciones *f*, *g* y *h* definidas por $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=2+x$ y $h(x)=\sqrt{x}$, indica el dominio y determina las expresiones de:

a) $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ **b)** $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$ **c)** $\left(\frac{f}{h}\right)(x)$ **d)** $(f\circ g\circ h)(x)$ **e)** $(f\circ h\circ g)(x)$ **f)** $(g\circ f\circ h)(x)$



Reflexiona

- Dadas dos funciones reales de variable real *f* y *g* ¿cómo se determina el dominio de la función $f+g$?
- Dadas dos funciones reales de variable real *f* y *g* ¿cómo se determina el dominio de la función $f-g$?
- Dadas dos funciones reales de variable real *f* y *g* ¿cómo se determina el dominio de la función $f\cdot g$?
- Dadas dos funciones reales de variable real *f* y *g* ¿cómo se determina el dominio de la función $\frac{f}{g}$?
- Dadas dos funciones reales de variable real *f* y *g* ¿cómo se determina el dominio de la función $f\circ g$?

3. Para cada una de las funciones definidas a continuación indica el dominio.

a) $f(x)=\frac{x+\sqrt{7}}{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\sqrt{2-2x-x^2}$ **c)** $f(x)=\sqrt{\frac{x-\sqrt{2}}{64-4x^2}}$ **d)** $f(x)=\frac{x^2}{\operatorname{sen}(3x)}$

Reflexiona

- ¿Cuál es el dominio de la función raíz cuadrada de *x*?
- ¿Qué condiciones debe satisfacer $f(x)$ para que $\sqrt{f(x)}$ sea un número real?

4. Dadas las funciones reales de variable real definidas por

$$f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{si} \quad x\geq 1\\ x+2 & \text{si} \quad x<1\end{cases} \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases}2x & \text{si} \quad x\geq 0\\ -3x+2 & \text{si} \quad x<0\end{cases},$$

Halla: **a)** $(f\circ g)(-2)$ **b)** $(f\circ g)(0)$ **c)** $(f\circ g)(x)$

En los problemas del 5 y 6 grafica las funciones dadas.

5.a) $f(x)=x^2$ **b)** $f_1(x)=x^2+\dfrac{5}{2}$ **c)** $f_2(x)=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2$ **d)** $f_3(x)=3-(x-3)^2$ **e)** $f_4(x)=\left|3-(x-3)^2\right|$

6. a) $s(x)=\operatorname{sen} x$ **b)** $s_1(x)=1+\operatorname{sen} x$ **c)** $s_2(x)=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ **d)** $s_3(x)=3\left|\operatorname{sen} x\right|$

7. Sea $f(x)=\dfrac{1}{3}x+5$,

a) Representa gráficamente la función *f*
b) ¿Es la función *f* inyectiva?
c) ¿Es la función *f* invertible?
d) En caso de ser invertible, halla la función inversa de *f*.

8. Determina el valor de cada una de las siguientes expresiones:

a) $\operatorname{arcsen}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ **b)** $\arctan(1)$ **c)** $\arccos\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **d)** $\operatorname{sen}^{-1}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **e)** $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

9. Dada la función real de variable real definida por $f(x)=\operatorname{arcsen}(x)$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas? Justifica tu respuesta.

I) La gráfica de la función arco seno contiene al punto $\left(1,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

II) $f(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$.

III) La gráfica decrece de izquierda a derecha desde el segundo cuadrante hacia el cuarto.

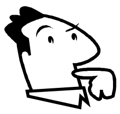
IV) $\operatorname{Dom}_f = [-1, 1]$.

V) $\operatorname{Rg}_f = \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

10. Para cada una de las funciones definidas a continuación indica el dominio.

a) $f(x) = \sqrt{3 - \operatorname{sen}^2 x}$ **b**) $g(x) = \arccos\left(\dfrac{2-x}{3}\right)$

11. Dada $f(x) = \cos x$. Halla: **a**) $f(\pi)$ **b**) $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$ **c**) $f(20\pi)$ **d**) $f\left(-\dfrac{20\pi}{15}\right)$.



Reflexiona

- ¿A cuál intervalo se restringe el dominio de la función seno para poder definir su inversa, la función arco seno? ¿por qué?
- ¿Qué condiciones debe satisfacer $f(x)$ para que $\operatorname{arcsen}(f(x))$ sea un número real?
- ¿A cuál intervalo se restringe el dominio de la función coseno para poder definir su inversa, la función arco coseno? ¿por qué?
- ¿Qué condiciones debe satisfacer $f(x)$ para que $\arccos(f(x))$ sea un número real?

Respuestas de los ejercicios propuestos

1) a) $4x^3 + x^2 + 4x + 4$ **b**) x^2 **c**) $1 + 32x^3$ **d**) $4x^5 + 16x^4 + 16x^3$ **e**) $\dfrac{16x^3}{(x+2)^2}$, $x \neq -2$

2) a) $\dfrac{1}{x(2+x)}$, $\operatorname{Dom}_{\frac{f}{g}} = R - \{-2, 0\}$ **b**) $\dfrac{2+x}{\frac{1}{x}} = x(2+x)$, $\operatorname{Dom}_{\frac{g}{f}} = R - \{0\}$

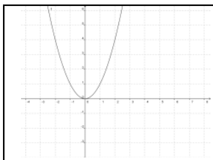
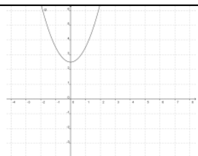
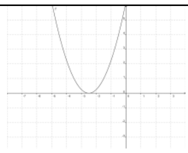
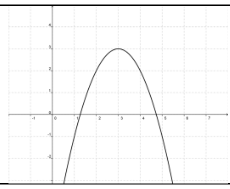
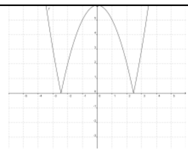
c) $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, $\operatorname{Dom}_{\frac{f}{h}} = (0, +\infty)$ **d**) $\dfrac{1}{2+\sqrt{x}}$, $\operatorname{Dom}_{f \circ g \circ h} = (0, +\infty)$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$, $\text{Dom}_{f\circ h\circ g}=(-2,+\infty)$ **f)** $2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $\text{Dom}_{g\circ f\circ h}=(0,+\infty)$

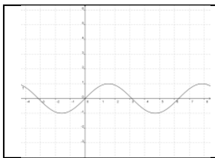
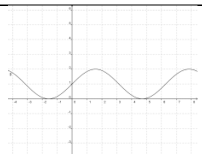
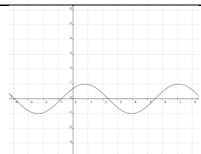
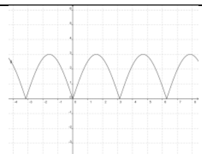
3) a) $\mathrm{R}-\{-1,1\}$ **b)** $\left[1-\sqrt{3},1+\sqrt{3}\right]$ **c)** $(-\infty,-4)\cup\left[\sqrt{2},4\right)$ **d)** $R-\left\{x\in R\,/\,x=\dfrac{k\,\pi}{3},\ k\in \mathrm{Z}\right\}$

4) a) -64 **b)** 2 **c)** $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}-(2x)^2 & \text{si} \quad x\geq \dfrac{1}{2}\\ -(-3x+2)^2 & \text{si} \quad x<0\\ 2x+2 & \text{si} \quad 0\leq x<\dfrac{1}{2}\end{cases}$

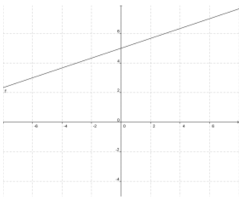
5)

				
$f(x)=x^2$	$f_1(x)=x^2+\dfrac{5}{2}$	$f_2(x)=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2$	$f_3(x)=3-(x-3)^2$	$f_4(x)=\left\lvert 3-(x-3)^2\right\rvert$

6)

			
$\mathrm{s}(x)=\operatorname{sen} x$	$\mathrm{s}_1(x)=1+\operatorname{sen} x$	$\mathrm{s}_2(x)=\operatorname{sen}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$	$\mathrm{s}_3(x)=3\lvert\operatorname{sen} x\rvert$

7) a)



b) Si **c)** Si **d)** $f^{-1}: R\rightarrow R$, tal que $f^{-1}(x)=3x-15$

8) a) $-\dfrac{\pi}{6}$ **b)** $\dfrac{\pi}{4}$ **c)** $\dfrac{3\pi}{4}$ **d)** $-\dfrac{\pi}{4}$ **e)** $\dfrac{2\pi}{3}$

9) I, IV y V

10) **e**) R **f**) $[-1, 5]$

11) **a**) -1 **b**) 0 **c**) 1 **d**) $-\frac{1}{2}$

Halla el error

- Si $f(x)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad x<-3 \\ x & \text{si} \quad -3\le x\le 0 \\ x^2 & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ entonces $f(4)=\begin{cases} 2 & \text{si} \quad 4<-3 \\ 4 & \text{si} \quad -3\le 4\le 0 \\ 64 & \text{si} \quad 4>0 \end{cases}$.
- $g(x)=x^3h(2-3x)$ significa que $g(x)=x^2h(x)\cdot(2x-3)$
- $g(x)=x^3h(2-3x)$ significa que $g(x)=x^2\ h\cdot 2-x_3\ h\cdot 3x$
- Para obtener la gráfica de $y=f(x+k)$ con $k>0$ se desplaza la gráfica de $y=f(x)$, según el eje *y*, *k* unidades hacia abajo.
- Para obtener la gráfica de $y=f(x+k)$ con $k<0$ se desplaza la gráfica de $y=f(x)$, según el eje *x*, *k* unidades hacia la izquierda
- Sea $f:R\to R$, tal que $f(x)=3-2x$ entonces $f^{-1}(x)=\dfrac{1}{3-2x}$
- Sea $f:R\to R$, tal que $f(x)=3-2x$ entonces $f^{-1}(x)=-3+2x$
- $\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}$
- Si $f(x)=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{3-2x}{4}\right)$ entonces $\operatorname{Dom}_f=[-1,1]$
- $\operatorname{sen}\left(\arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)=\cos\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{1}{2}\right)$
- $\arccos\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4\pi}{3}\Leftrightarrow\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}$
- Si $f(x)=\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{3-2x}{4}\right)$ entonces $\operatorname{Dom}_f=[-1,1]$
- $\cos 2x-1=\cos(2x-1)$
- $\operatorname{sen}(3x)=3\operatorname{sen}(x)$
- $f(x)=\left(\sqrt{x+\dfrac{\pi}{2}}\right)^2\Rightarrow f(x)=x+\dfrac{\pi}{2}$
- $\operatorname{sen} x=0\Leftrightarrow x=2k\pi,\quad k\in Z$

- $f(x)=\cos x \Rightarrow f(x)=0 \Leftrightarrow x=k\dfrac{\pi}{2}, \quad k \in Z$

Practica elaborada por la Prof:
Aida Montezuma.
Ampliada por Prof
Antonio Di Teodoro. 2010